УДК 512.71
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1998-2004

ДВА ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯ БЛОЧНО-РЕКУРСИВНОГО АЛГОРИТМА LU-РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ НАД ИДЕМПОТЕНТНЫМИ ПОЛУПОЛЯМИ

© С. А. Киреев

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: seregakireeff@yandex.ru

Предлагаются алгоритмы для двух частных случаев блочно-рекурсивного LU-разложения матриц над идемпотентными полуполями. Мы рассматриваем случаи, в которых блочная полоса имеет ширину 1 или 2. Для каждого из них мы получаем алгоритм разложения и приводим пример.
Ключевые слова: LU-разложение; блочно-рекурсивный алгоритм; идемпотентное полуполе

Введение

Во многих задачах линейной алгебры построение LU-разложения матрицы составляет основу решения. Это имеет место и для задач линейной алгебры над полуполями. Интерес к блочно-рекурсивным матричным алгоритмам вызван двумя причинами. С одной стороны, такие алгоритмы позволяют уменьшить число операций, а с другой стороны, они позволяют распараллеливать алгоритмы на вычислительных системах с распределенной памятью.

Целью является создание дихотомического блочно-рекурсивного алгоритма. Пока будут рассмотрены два частных случая, когда блочная полоса имеет размер 1 или 2.

Пусть R – идемпотентное полуполе, T – заданный в нем порядок, $A^{'} \in R^{n\times n}$ [1]. Требуется найти нижнетреугольную матрицу $L \in R^{n\times n}$ и верхнетреугольную матрицу $U \in R^{n\times n}$ с рангом, отличным от нуля, для которых выполняется равенство $A^{'} = LU$ над R. Обозначим элементы матрицы $A^{'} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$. Единицу и ноль идемпотентного полуполя обозначаем, соответственно $\mathbb{1}$ и $\mathbb{0}$. В общем случае они отличны от числовых нуля и единицы. Будем вычислять LU-разложение матрицы $A^{'}$ без использования перестановок [2].

Алгоритм блочного разбиения с полосой ширины два

I. В случае $n = 1$ будем использовать такое разложение: $L = (\mathbb{1})$, $U = (a_{11})$. Понятно, что можно взять и другое: $L = (a_{11})$, $U = (\mathbb{1})$.

II. $n = 2$.

1. Если $a_{11} \neq \mathbb{0}$, то возможны следующие случаи:

а) если $\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \leq_T a_{22}$, то $L = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \mathbb{0} & a_{22} \end{pmatrix}$;

б) если $\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} >_T a_{22}$, то LU-разложение не существует.

2. Если $a_{11} = \mathbb{0}$, то возможны следующие случаи:

а) если $a_{12} = \mathbb{0}$, то $L = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & a_{22} \end{pmatrix}$;

б) если $a_{21} = \mathbb{0}$, то $L = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & a_{12} \\ \mathbb{0} & a_{22} \end{pmatrix}$;

в) если $a_{12} \neq \mathbb{0}$ и $a_{21} \neq \mathbb{0}$, то LU-разложение не существует.

III. $n > 2$.

1. Разобьем матрицу A' на 4 блока следующим образом: $A' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,
$A \in R^{(n-2)\times(n-2)}$, $B \in R^{(n-2)\times 2}$, $C \in R^{2\times(n-2)}$, $D \in R^{2\times 2}$.

2. Найдем LU-разложение блока A. Для этого вызывем алгоритм для блока A. В случае, если блок A разложим, получим матрицы L_1, U_1, для которых выполняется $A = L_1 U_1$. Если же разложение не существует для A, то LU-разложение не существует для всей матрицы.

3. Решим матричные уравнения $L_1 U_2 = B$ и $L_3 U_1 = C$, где U_2 и L_3 – неизвестные матрицы. Если решение не существует хотя бы для одного матричного уравнения, то LU-разложение не существует для матрицы A'.

Общим решением этих матричных уравнений могут быть множества матриц. Те элементы матриц в решении, которые нельзя изменить, будем называть фиксированными. Элементы, которые могут изменяться в пределах отрезка, назовем интервальными. Пусть x – фиксированный элемент, $[a, b], [c, d]$ – интервальные элементы. Для работы с общими решениями матричных уравнений введем следующие операции:

- $x \oplus [a, b] = [a, b] \oplus x = [x \oplus a, x \oplus b]$;
  заметим, что в случае, если $x \geq_T a$ и $x \geq_T b$, результатом будет фиксированный элемент x;
- $x \otimes [a, b] = [a, b] \otimes x = [x \otimes a, x \otimes b]$;
- $[a, b] \otimes [c, d] = [a \otimes c, b \otimes d]$;
- $[a, b] \oplus [c, d] = [a \oplus c, b \oplus d]$.

С помощью этих операций будем находить произведение $L_3 U_2$ на следующих шагах алгоритма.

Обозначим U_2^m, L_3^m – матрицы с наибольшими значениями на интервальных элементах решения. U_2^0, L_3^0 – матрицы с наименьшими возможными значениями, т. е. фиксируем алгебраические нули на интервальных элементах решения.

4. Проверяем, существует ли для блока D LU-разложение. Так как $D \in R^{2\times 2}$, то используем алгоритм для матриц второго порядка, описанный выше.

5. Если разложение $D = L_4 U_4$ существует, то возможны следующие случаи:

а) если $L_3^0 U_2^0 \leq_T D$ (должны выполняться все неравенства соответствующих элементов), то $L = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbb{0} \\ L_3^0 & L_4 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2^0 \\ \mathbb{0} & U_4 \end{pmatrix}$;

б) если $L_3^0 U_2^0 \not\leq_T D$, то LU-разложение матрицы A' не существует.

Если мы не хотим лишних нулей в LU-разложении, то нужно найти произведение общих решений $L_3 U_2$. Из полученного множества матриц выберем матрицу, для которой выполняется $L_3 U_2 \leq_T D$. Затем зафиксируем значения на интервальных элементах в L_3 и U_2 такие, при которых получается выбранная матрица.

6. Если для блока D не существует LU-разложение, то мы должны решить следующую подзадачу:

$$L_3 U_2 \oplus D' = D.$$

Из решений матричных уравнений на шаге 3 необходимо выбрать такие матрицы L_3 и U_2, для которых выполняется $L_3U_2 \leq_T D$ и среди решений подзадачи есть разложимая матрица $D^{'} = L_4^{'}U_4^{'}$.

В случае, если матричное уравнение не имеет решений, или среди решений отсутствует разложимая матрица при всех L_3, U_2 , разложение $A^{'} = LU$ не существует [3].

Пусть $D=(d_{ij})$, $D^{'}=(d_{ij}^{'})$, $L_3U_2=(e_{ij})$, $i,j=1,2$. Опишем алгоритм решения этой подзадачи.

а) Среди всех решений L_3, U_2 выбираем такие, для которых выполняется хотя бы одна из систем:

$$(1) \begin{cases} e_{12}=d_{12}; \\ e_{11} \leq_T d_{11}; \\ e_{21} \leq_T d_{21}; \\ e_{22} \leq_T d_{22}. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} e_{21}=d_{21}; \\ e_{11} \leq_T d_{11}; \\ e_{12} \leq_T d_{12}; \\ e_{22} \leq_T d_{22}. \end{cases}$$

Если таких матриц среди решений нет, то LU-разложение не существует.

б) Если $d_{11} \neq \mathbb{0}$ и $d_{22} \neq \mathbb{0}$, то найдем число $d^{'} = \frac{d_{21}d_{12}}{d_{11}d_{22}}$. Заметим, что $d^{'} \neq \mathbb{0}$, т. к. в противном случае $d_{21} = \mathbb{0}$ или $d_{12} = \mathbb{0}$, откуда следует, что матрица D разложима и шаг 6 алгоритма не выполнялся бы.

В случае выполнения системы (1) :

$$d_{12}^{'} = \begin{cases} \frac{d_{12}}{d^{'}}, \text{ если } d_{11} \neq \mathbb{0} \text{ и } d_{22} \neq \mathbb{0}; \\ \mathbb{0}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Остальные элементы матрицы $D^{'}$ совпадают с элементами матрицы D. В случае выполнения системы (2) :

$$d_{21}^{'} = \begin{cases} \frac{d_{21}}{d^{'}}, \text{ если } d_{11} \neq \mathbb{0} \text{ и } d_{22} \neq \mathbb{0}; \\ \mathbb{0}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Остальные элементы матрицы $D^{'}$ совпадают с элементами матрицы D. Таким образом, получили разложимую матрицу $D^{'}$, которая является решением матричного уравнения $L_3U_2 \oplus D^{'} = D$.

в) Найдем разложение $D^{'} = L_4^{'}U_4^{'}$, воспользовавшись алгоритмом для матриц второго порядка. Таким образом, LU-разложение матрицы $A^{'}$:

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbb{0} \\ L_3 & L_4^{'} \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ \mathbb{0} & U_4^{'} \end{pmatrix}.$$

П р и м е р. Найдем над $max, +$ LU-разложение матрицы

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 9 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 7 & 11 & 10 & 12 \\ 4 & 6 & 9 & 11 & 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

I. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ 1 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \mathbb{0} & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; решаем $L_1U_2 = B$, получаем $U_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & [\mathbb{0}, 8] \end{pmatrix}$; $U_2^0 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & \mathbb{0} \end{pmatrix}$;

$L_3U_1 = C$; $L_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & [\mathbb{0}, -1] \\ -1 & [\mathbb{0}, -2] \end{pmatrix}$; $L_3^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -1 & \mathbb{0} \end{pmatrix}$;

D – разложимый, так как $3+7-5=5<9$; $L_4=\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -2 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U_4=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ \mathbb{0} & 9 \end{pmatrix}$. $L_3^0 U_2^0 \le_T D$;
$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \le_T \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$; выполняется. Разложение $\begin{pmatrix} L_1 & \mathbb{0} \\ L_3^0 & L_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} U_1 & U_2^0 \\ \mathbb{0} & U_4 \end{pmatrix}$.

II. $L_1=\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -1 & \mathbb{0} & -2 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U_1=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 \\ \mathbb{0} & 5 & 6 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & 5 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 7 \\ 8 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 & 11 \\ 4 & 6 & 9 & 11 \end{pmatrix}$;

$L_1U_2=B$, $U_2=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & [\mathbb{0},7] \\ 8 & 7 \\ [\mathbb{0},6] & 9 \end{pmatrix}$;

$L_3U_1=C$; $L_3=\begin{pmatrix} 3 & [\mathbb{0},1] & 2 & 2 \\ 2 & [\mathbb{0},1] & 4 & [\mathbb{0},2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & [\mathbb{0},2] & 2 \\ 2 & [\mathbb{0},1] & 4 & [\mathbb{0},2] \end{pmatrix}$.

$D=\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ – не разложим, так как $12+12-10=14>11$; $d'=3$;

$$L_3U_2=\begin{pmatrix} 3 & [\mathbb{0},1] & 2 & 2 \\ 2 & [\mathbb{0},1] & 4 & [\mathbb{0},2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & [\mathbb{0},7] \\ 8 & 7 \\ [\mathbb{0},6] & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 11 \end{pmatrix};$$

$\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \le_T \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$; выполняется система (2), значит
$D'=\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$, $L_4'=\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -1 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U_4'=\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ \mathbb{0} & 11 \end{pmatrix}$.

В L_3 и U_2 фиксируем наибольшие значения и получаем разложение для матрицы A':

$$L=\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ -1 & \mathbb{0} & -2 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 3 & 1 & 2 & 2 & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ 2 & 1 & 4 & 2 & -1 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \ U=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 \\ \mathbb{0} & 5 & 6 & \mathbb{0} & 7 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & 5 & 7 & 8 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 9 & 6 & 9 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 10 & 12 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 11 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм блочного разбиения с полосой ширины один

I. В случае $n=1$ будем возвращать разложение таким: $L=(\mathbb{1})$, $U=(a_{11})$. Заметим, что в случае $a_{11}=\mathbb{0}$ может потребоваться разложение вида: $L=(\mathbb{0})$, $U=(\mathbb{1})$.

II. $n>1$.

1. Разобьем матрицу A' на 4 блока следующим образом: $A'=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,
$A\in R^{(n-1)\times(n-1)}$, $B\in R^{(n-1)\times 1}$, $C\in R^{1\times(n-1)}$, $D\in R$.

2. Найдем LU-разложение блока A. Для этого вызывем алгоритм для блока A. В случае, если блок A разложим, получим матрицы L_1, U_1, для которых выполняется $A=L_1U_1$. Если же разложение не существует для A, то LU-разложение не существует для всей матрицы.

3. Решим матричные уравнения $L_1U_2=B$ и $L_3U_1=C$, где U_2 и L_3 – неизвестные матрицы. Если решение не существует хотя бы для одного матричного уравнения, то LU-разложение не существует для матрицы A'.

4. Проверяем, выполняется ли $L_3U_2 \le_T D$. Для этого нужно найти произведение общих решений L_3U_2 с помощью операций, введенных в предыдущем алгоритме. Если на шаге 3 получено

несколько семейств решений L_3 или U_2, то проверяем всевозможные произведения до получения выполнимости $L_3U_2 \le_T D$. Если при всех L_3 и U_2 неравенство не выполняется, то LU-разложение не существует.

Пусть x – фиксированный элемент, $[a, b]$ – интервальный элемент. В результате умножения L_3 на U_2 возможны следующие случаи:

- $L_3U_2 = x$ и $x \le_T D$, тогда фиксируем наибольшие значения на интервальных элементах в матрицах L_3 и U_2 и получаем LU-разложение;
- $L_3U_2 = x$ и $x >_T D$, тогда LU-разложение не существует;
- $L_3U_2 = [a, b]$ и $b \le_T D$, тогда фиксируем наибольшие значения на интервальных элементах в матрицах L_3 и U_2 и получаем LU-разложение;
- $L_3U_2 = [a, b]$ и $a >_T D$, тогда LU-разложение не существует;
- $L_3U_2 = [a, b]$ и $a \le_T D <_T b$, тогда нужно уменьшить в матрицах L_3 и U_2 наибольшие значения интервальных элементов, на которых происходит превышение допустимого значения, на $\frac{b}{D}$, затем зафиксировать полученные значения. Если $D = \mathbb{0}$, то фиксируем алгебраические нули.

Таким образом, при выполнении условия $L_3U_2 \le_T D$ LU-разложение матрицы A':

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbb{0} \\ L_3 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ \mathbb{0} & D \end{pmatrix}.$$

П р и м е р. Найдем над $max, +$ LU-разложение матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 9 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 7 & 11 & 10 & 12 \\ 4 & 6 & 9 & 11 & 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

I. $A = 2$, $B = 4$, $C = 3$, $D = 5$, $L_1 = \mathbb{1}$, $U_1 = 2$; $L_1U_2 = B$, $U_2 = 4$; $L_3U_1 = C$, $L_3 = 1$, $L_3U_2 = 5 \le 5$;

II. $L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ 1 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \mathbb{0} & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$; $L_1U_2 = B$, $U_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $L_3U_1 = C$, $L_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & [\mathbb{0}, -1] \end{pmatrix}$; $L_3U_2 = [3, 5] \le 5$;

III. $L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & -1 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ \mathbb{0} & 5 & 6 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $L_1U_2 = B$, $U_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ [\mathbb{0}, 8] \\ [\mathbb{0}, 7] \end{pmatrix}$; $L_3U_1 = C$, $L_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & [\mathbb{0}, -2] \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & [\mathbb{0}, -3] & -2 \end{pmatrix}$; $L_3U_2 = 6 \le 9$;

IV. $L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & -1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ -1 & -3 & -2 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 \\ \mathbb{0} & 5 & 6 & 8 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & 5 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}$;

$L_1U_2 = B$, $U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ [\mathbb{0}, 6] \end{pmatrix}$; $L_3U_1 = C$, $L_3 = \begin{pmatrix} 3 & [\mathbb{0}, 1] & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & [\mathbb{0}, 2] & 2 \end{pmatrix}$;

$L_3U_2 = \begin{pmatrix} 3 & [\mathbb{0},1] & 2 & 2 \end{pmatrix} U_2 = 10 \leq 10;$

V. $L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & -1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ -1 & -3 & -2 & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ 3 & 1 & 2 & 2 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 & 5 \\ \mathbb{0} & 5 & 6 & 8 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & 5 & 7 & 8 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 9 & 6 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$; $L_1U_2 = B$, $U_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ [\mathbb{0},7] \\ 7 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$;

$L_3U_1 = C$, $L_3 = \begin{pmatrix} 2 & [\mathbb{0},1] & 4 & [\mathbb{0},2] & [\mathbb{0},2] \end{pmatrix}$; $L_3U_2 = [11,14]$, $D = 11$; $b - D = 14 - 11 = 3$, нужно уменьшить наибольшее значение интервального элемента в матрице L_3, на котором происходит превышение допустимого значения, на 3, а уже затем фиксировать значения.

Таким образом, получаем разложение для матрицы A':

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & -1 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ -1 & -3 & -2 & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 3 & 1 & 2 & 2 & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ 2 & 1 & 4 & 2 & -1 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 \\ \mathbb{0} & 5 & 6 & 8 & 7 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & 5 & 7 & 8 & 7 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 9 & 6 & 9 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 10 & 12 \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & 11 \end{pmatrix}.$$

Заключение

Мы описали для матриц над полуполями два блочных алгоритма вычисления LU-разложения матрицы без использования перестановок. Каждый из этих алгоритмов завершается либо вычислением разложения, либо устанавливает отсутствие такого разложения у заданной матрицы. Полученные блочные алгоритмы имеют сложность $O(n^3)$.

Дальнейшим развитием этого направления должно быть обобщение данного подхода и создание универсального дихотомического рекурсивного алгоритма, который будет иметь сложность матричного умножения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малашонок Г.И., Киреев С.А.* Введение в идемпотентную математику. Тамбов: Издат. дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2014. 48 с.

2. *Kireev S.* Sequential Algorithm LU-decomposition of matrices over idempotent semifield. International Conference on Mathematical Partnership, Parallel Computing and Computer Algebra: MathParCA-2016, Loutra, Agia Paraskevi, Greece, August, 5 - 15, 2016. P. 41–45.

3. *Kireev S.* Block-recursive algorithm LU-decomposition of matrices over idempotent semifields // International Conference on Mathematical Partnership, Parallel Computing and Computer Algebra: MathParCA-2016, Loutra, Agia Paraskevi, Greece, August, 5 - 15, 2016. P. 15–16.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00420).

Поступила в редакцию 18 октября 2016 г.

Киреев Сергей Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: seregakireeff@yandex.ru

UDC 512.71
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1998-2004

TWO PARTICULAR CASES OF BLOCK-RECURSIVE ALGORITHM LU-DECOMPOSITION OF THE MATRIX OVER IDEMPOTENT SEMIFIELDS

© **S. A. Kireev**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: seregakireeff@yandex.ru

We propose two algorithms for particular cases of block-recursive LU-decomposition of matrices over idempotent semifields. We consider the cases in which the band width of the block is equal to 1 or 2. For each of them we will get the decomposition algorithm and give an example.
Key words: LU-decomposition; block-recursive algorithm; idempotent semifield

REFERENCES

1. *Malaschonok G.I., Kireev S.A.* Introduction in Idempotent Mathematics. Tambov: Publishing House of TSU, 2014. 48 pp.
2. *Kireev S.* Sequential Algorithm LU-decomposition of matrices over idempotent semifield. International Conference on Mathematical Partnership, Parallel Computing and Computer Algebra: MathParCA-2016, Loutra, Agia Paraskevi, Greece, August, 5 - 15, 2016. P. 41–45.
3. *Kireev S.* Block-recursive algorithm LU-decomposition of matrices over idempotent semifields. International Conference on Mathematical Partnership, Parallel Computing and Computer Algebra: MathParCA-2016, Loutra, Agia Paraskevi, Greece, August, 5 - 15, 2016. P. 15–16.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00420).

Received 18 October 2016

Kireev Sergey Anatolevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student of the Functional Analysis Department, e-mail: seregakireeff@yandex.ru

Информация для цитирования:

Киреев С.А. Два частных случая блочно-рекурсивного алгоритма LU-разложения матриц над идемпотентными полуполями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1998-2004. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1998-2004

Kireev S.A. Dva chastnyh sluchaya blochno-rekursivnogo algoritma LU-razlozheniya matrits nad idempotentnymi polupolyami [Two particular cases of block-recursive algorithm LU-decomposition of the matrix over idempotent semifields]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1998-2004. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1998-2004 (In Russian)